

Warto wiedzieć:

- Możemy podzielić/pomnożyć obie strony nierówności przez liczbę różną od 0.
- Dzieląc/mnożąc nierówność przez liczbę ujemną zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny.

Zad. 1. Ile jest wszystkich liczb

- a) całkowitych nieujemnych, które są rozwiązaniami nierówności $3x < 9$;

$$3x < 9 \quad || :3$$

$$x < \frac{9}{3} = 3$$

Liczb całkowite nieujemne mniejsze od 3: 0, 1, 2 Trzy

- b) całkowitych dodatnich, które są rozwiązaniami nierówności $7x \leq 18$;

$$7x \leq 18 \quad || :7$$

$$x \leq \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$$

Liczb całkowite dodatnie mniejsze lub równe od $2\frac{4}{7}$ to:

1, 2 Odp. Dwie liczby.

- c) całkowitych ujemnych, które są rozwiązaniami nierówności $-3x < 15$;

$$-3x < 15$$

$$-15 < 3x \quad || :3$$

$$-\frac{15}{3} < x$$

$$x > -5$$

Liczb całkowite ujemne większe od -5 to: -4, -3, -2, -1

Odp.: Cztery liczby.

- d) całkowitych nieujemnych, które są rozwiązaniami nierówności $-7x \geq -21$.

$$-7x \geq -21 \quad || (-7)$$

$$x \leq \frac{-21}{-7} = 3$$

Liczb całkowite nieujemne mniejsze lub równe 3 to 0, 1, 2, 3.

Odp.: Cztery liczby.

Warto wiedzieć!

- Mamy dodać / odjąć do obu stron dowolne wyrażenie

Zad. 2. Zapisz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są rozwiązaniami nierówności:

a) $3x - 4 < 5 - 6x$ $| +6x$

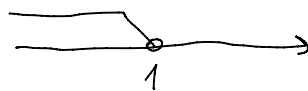
$$3x + 6x - 4 < 5 - 6x + 6x$$

$$9x - 4 < 5 \quad | +4$$

$$9x - 4 + 4 < 5 + 4$$

$$9x < 9 \quad || :9$$

$$x < 1$$



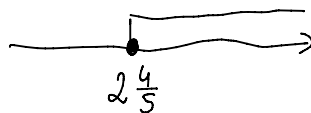
$$x \in (-\infty, 1)$$

b) $2x + 8 \leq 7x - 6$ $| -8 - 7x$

$$2x - 7x \leq -8 - 6$$

$$-5x \leq -14 \quad || (-5)$$

$$x \geq \frac{-14}{-5} = +\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$$



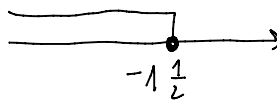
$$x \in [2\frac{4}{5}, \infty)$$

c) $3x - 1 \geq 7x + 5$ $| -7x + 1$

$$3x - 7x \geq 5 + 1$$

$$-4x \geq 6 \quad || (-4)$$

$$x \leq \frac{6}{-4} = -\frac{6}{4} = -1\frac{2}{4} = -1\frac{1}{2}$$



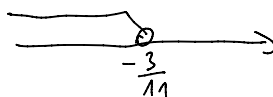
$$x \in (-\infty, -1\frac{1}{2}]$$

d) $4 - 9x > 2x + 7$ $| -2x - 4$

$$-9x - 2x > 7 - 4$$

$$-11x > 3 \quad || (-11)$$

$$x < \frac{3}{-11} = -\frac{3}{11}$$



$$x \in (-\infty, -\frac{3}{11})$$

e) $5 + 6x \leq 2 - 7x$ $| +7x - 5$

$$6x + 7x \leq 2 - 5$$

$$13x \leq -3 \quad || :13$$

$$x \leq \frac{-3}{13}$$



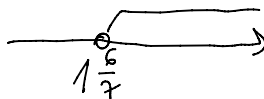
$$x \in (-\infty, -\frac{3}{13}]$$

f) $6 - 5x < 2x - 7$ $| -2x - 6$

$$-5x - 2x < -7 - 6$$

$$-7x < -13 \quad || (-7)$$

$$x > \frac{-13}{-7} = +\frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$$



$$x \in (1\frac{6}{7}, \infty)$$

Zad. 3. Zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są rozwiązaniami nierówności

a) $2 - 4(3x - 2) \leq 7x$

$$2 - 4 \cdot 3x - 4(-2) \leq 7x$$

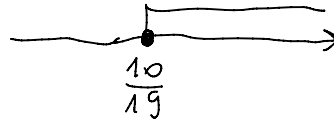
$$2 - 12x + 8 \leq 7x$$

$$-12x + 10 \leq 7x \quad | -7x - 10$$

$$-12x - 7x \leq -10$$

$$-19x \leq -10 \quad || (-19)$$

$$x \geq \frac{-10}{-19} = +\frac{10}{19}$$



b) $3x - (2 - x) \geq 7$

$$3x - 2 - (-x) \geq 7$$

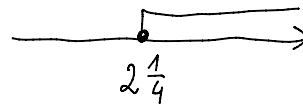
$$3x - 2 + x \geq 7$$

$$4x - 2 \geq 7 \quad | +2$$

$$4x \geq 7 + 2$$

$$4x \geq 9 \quad || 4$$

$$x \geq \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$



c) $5x - 4(2 + 3x) < 6$

$$5x - 4 \cdot 2 - 4 \cdot 3x < 6$$

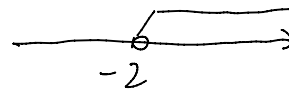
$$5x - 8 - 12x < 6$$

$$-7x - 8 < 6 \quad | +8$$

$$-7x < 6 + 8$$

$$-7x < 14 \quad || (-7)$$

$$x > \frac{14}{-7} = -\frac{14}{7} = -2$$



d) $7 - 3(4 + 5x) > 3x$

$$7 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5x > 3x$$

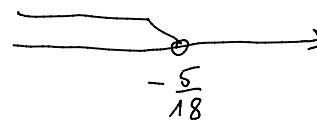
$$7 - 12 - 15x > 3x$$

$$-5 - 15x > 3x \quad | -3x + 5$$

$$-15x - 3x > 5$$

$$-18x > 5 \quad || (-18)$$

$$x < \frac{5}{-18} = -\frac{5}{18}$$



Zad. 4. Rozwiąż nierówność

a) $3 - \frac{2x+4}{5} \leq 6x \quad | \cdot 5$

$$5 \cdot 3 - 5 \cdot \frac{2x+4}{5} \leq 5 \cdot 6x$$

$$15 - (2x+4) \leq 30x$$

$$15 - 2x - 4 \leq 30x$$

$$-2x - 30x \leq -15 + 4$$

$$-32x \leq -11 \quad || (-32)$$

$$x \geq \frac{-11}{-32} = \frac{11}{32}$$

b) $5 - \frac{6-7x}{2} \geq 3x \quad | \cdot 2$

$$2 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{6-7x}{2} \geq 2 \cdot 3x$$

$$10 - (6-7x) \geq 6x$$

$$10 - 6 + 7x \geq 6x$$

$$7x - 6x \geq -10 + 6$$

$$x \geq -4$$

c) $\frac{3x-2}{5} - \frac{2x+7}{3} > 1 \quad | \cdot 15$

$$15 \cdot \frac{3x-2}{5} - 15 \cdot \frac{2x+7}{3} > 15 \cdot 1$$

$$3(3x-2) - 5(2x+7) > 15$$

$$9x - 6 - 10x - 35 > 15$$

$$9x - 10x > 6 + 35 + 15$$

$$-x > 56 \quad || (-1)$$

$$x < \frac{56}{-1} = -\frac{56}{1} = -56$$

d) $\frac{2x-3}{4} + \frac{3-4x}{6} < 3 \quad | \cdot 12$

$$12 \cdot \frac{2x-3}{4} + 12 \cdot \frac{3-4x}{6} < 12 \cdot 3$$

$$3(2x-3) + 2(3-4x) < 36$$

$$6x - 9 + 6 - 8x < 36$$

$$6x - 8x < 9 - 6 + 36$$

$$-2x < 39 \quad || (-2)$$

$$x > \frac{39}{-2} = -\frac{39}{2} = -19 \frac{1}{2}$$

Zad. 5. Rozwiąż nierówność

a) $(3x-1)^2 + 3 < (3x-2)^2$

$$(3x)^2 + 2 \cdot (3x)(-1) + (-1)^2 + 3 < (3x)^2 + 2(3x)(-2) + (-2)^2$$

$$9x^2 - 6x + 1 + 3 < 9x^2 - 12x + 4$$

$$9x^2 - 6x - 9x^2 + 12x < -1 - 3 + 4$$

$$6x < 0 \quad \| 6$$

$$x < \frac{0}{6} = 0$$

$$b) (2x + 5)^2 - (x + 2)(4x - 1) \leq 7$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2 - (4x^2 - x + 8x - 2) \leq 7$$

$$\underline{4x^2} + 20x + 25 - \underline{4x^2} + x - 8x + 2 \leq 7$$

$$20x + x - 8x \leq -25 - 2 + 7$$

$$13x \leq -20 \quad \| 13$$

$$x \leq \frac{-20}{13} = -1 \frac{7}{13}$$

$$c) (1 - 3x)^2 - 3x^2 \geq (2x - 1)(3x + 2)$$

$$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-3x) + (3x)^2 - 3x^2 \geq 6x^2 + 4x - 3x - 2$$

$$1 - 6x + 9x^2 - 3x^2 \geq 6x^2 + x - 2$$

$$\underline{-6x + 9x^2 - 3x^2 - 6x^2} - x \geq -1 - 2$$

$$\underline{-6x - x} \geq -3$$

$$-7x \geq -3 \quad \| (-7)$$

$$x \leq \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

$$d) (2x - 5)^2 - (3x - 1)(x + 2) > x^2$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (-5) + (-5)^2 - (3x^2 + 6x - x - 2) > x^2$$

$$\underline{4x^2} - \underline{20x} + \underline{25} - \underline{3x^2} - \underline{6x} + \underline{x} + \underline{2} > x^2$$

$$x^2 - 25x + 27 > x^2$$

$$\underline{x^2} - 25x - \underline{x^2} > -27$$

$$-25x > -27 \quad \| (-25)$$

$$x < \frac{-27}{-25} = +\frac{27}{25} = 1 \frac{2}{25}$$

Zad. 6. Zapisz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są rozwiązaniami nierówności

$$a) 3 < 1 - 4x \leq 7$$

$$3 < 1 - 4x \quad ; \quad 1 - 4x \leq 7$$

$$4x < 1 - 3$$

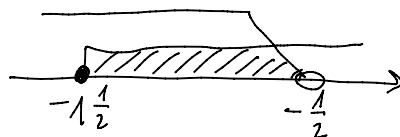
$$-4x \leq 7 - 1$$

$$4x < -2 \quad \| 4$$

$$-4x \leq 6 \quad \| (-4)$$

$$x < \frac{-2}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

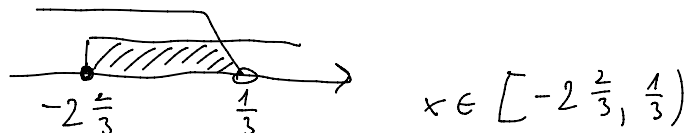
$$x \geq \frac{6}{-4} = -\frac{6}{4} = -1 \frac{2}{4} = -1 \frac{1}{2}$$



$$x \in [-1 \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

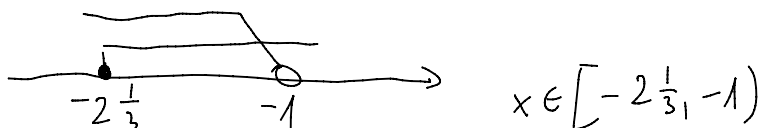
b) $2 > 3x + 1 \geq -7$

$$\begin{array}{l} 2 > 3x + 1 \quad ; \quad 3x + 1 \geq -7 \\ -3x > 1 - 2 \quad \quad \quad 3x \geq -7 - 1 \\ -3x > -1 \quad \| (-3) \quad \quad 3x \geq -8 \quad \| 3 \\ x < \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \quad \quad \quad x \geq \frac{-8}{3} = -2\frac{2}{3} \end{array}$$



c) $-5 \leq 3x + 2 < -1$

$$\begin{array}{l} -5 \leq 3x + 2 \quad ; \quad 3x + 2 < -1 \\ -3x \leq 5 + 2 \quad \quad \quad 3x < -1 - 2 \\ -3x \leq 7 \quad \| (-3) \quad \quad 3x < -3 \quad \| 3 \\ x \geq \frac{7}{-3} = -2\frac{1}{3} \quad \quad \quad x < \frac{-3}{3} = -1 \end{array}$$



Zad.7. Rozwiąż nierówność

a) $x \leq 2 + x\sqrt{3}$

$$\begin{array}{l} x - x\sqrt{3} \leq 2 \\ x(1 - \sqrt{3}) \leq 2 \quad \| (1 - \sqrt{3}) \quad \quad 1 - \sqrt{3} \approx 1 - 1,7 < 0 \text{ ujemne} \\ x \geq \frac{2}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{1^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = -1 - \sqrt{3} \end{array}$$

b) $x\sqrt{5} \geq \sqrt{3} - 2x$

$$\begin{array}{l} x\sqrt{5} + 2x \geq \sqrt{3} \\ x(\sqrt{5} + 2) \geq \sqrt{3} \quad \| (\sqrt{5} + 2) \quad \quad \sqrt{5} + 2 > 0 \text{ (dodatnie)} \\ x \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + 2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{3}}{5 - 4} = \frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{15} + 2\sqrt{3} \end{array}$$

c) $2x - \sqrt{7} > x\sqrt{7} + 4$

$$\begin{array}{l} 2x - x\sqrt{7} > \sqrt{7} + 4 \\ x(2 - \sqrt{7}) > \sqrt{7} + 4 \quad \| (2 - \sqrt{7}) \quad \quad 2 - \sqrt{7} \approx 2 - 2,6 < 0 \text{ ujemne} \\ x < \frac{\sqrt{7} + 4}{2 - \sqrt{7}} \cdot \frac{2 + \sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7} + 7 + 8 + 4\sqrt{7}}{2^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{6\sqrt{7} + 15}{4 - 7} = \frac{6\sqrt{7} + 15}{-3} = -2\sqrt{7} - 5 \end{array}$$