MateMATURA #2

Rozwiązania

Umiejętność: I.4. Uczeń stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

Zad. 1. Oblicz

a) $\sqrt{4} = 2$ bo $2^2 = 4$

b) $\sqrt{9} = 3$ bo $3^2 = 9$

c) $\sqrt{25} = 5$ bo $5^2 = 25$

d) $\sqrt{49} = 7$ bo $7^2 = 49$

e) $\sqrt{100} = 10$ bo $10^2 = 100$

f) $\sqrt{121} = 11$ bo $11^2 = 121$

g) $\sqrt[3]{1} = 1$ bo $1^3 = 1$

h) $\sqrt[3]{8} = 2$ bo $2^3 = 8$

i) $\sqrt[3]{27} = 3$ bo $3^3 = 27$

j) $\sqrt[3]{64} = 4$ bo $4^3 = 64$

k) $\sqrt[3]{125} = 5$ bo $5^3 = 125$

l) $\sqrt[3]{1000} = 10$ bo $10^3 = 1000$

Własności pierwiastków

- Rozdzielność względem mnożenia $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, np.: $\sqrt{36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$
- Rozdzielność względem dzielenia $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, np.: $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

Uwaga!

Pierwiastkowanie nie jest rozdzielne względem dodawania/odejmowania

$\sqrt{4} + \sqrt{4} \neq \sqrt{8}$

Zad. 2. Oblicz

a) $\sqrt{41^2 - 9^2} \overset{1/2}{=} \sqrt{1681 - 81} \overset{1/4}{=} \sqrt{1600} \overset{2}{=} 40$

Kolejność wykonywania działań

1. Wykonujemy działania w nawiasach (zawartość pod pierwiastkiem traktujemy jakby była w nawiasie)
2. Potęgowanie / pierwiastkowanie
3. Mnożenie / dzielenie
4. Dodawanie / odejmowanie

b) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{1\cdot 16+9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

c) $\sqrt{3\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$

d) $\sqrt{0,36} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = 0,6$

e) $\sqrt{36^2 + 15^2} = \sqrt{1296 + 225} = \sqrt{1521} = 39$

f) $\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -6$

g) $\sqrt[3]{-0,064} = -\sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = -\frac{4}{10} = -0,4$

h) $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

i) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = -\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$

Zad. 3. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{54} = \sqrt{9\cdot 6} = 3\sqrt{6}$

c) $\sqrt{300} = \sqrt{100\cdot 3} = 10\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8\cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

e) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt[3]{6000} = \sqrt[3]{1000\cdot 6} = 10\sqrt[3]{6}$

Zad. 4. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{b}$

a) $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ podobnie jak $3x - x = 2x$

b) $2\sqrt{6} + \sqrt{54} = 2\sqrt{6} + \sqrt{9\cdot 6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$

c) $2\sqrt{27} + 5\sqrt{75} = 2\sqrt{9\cdot 3} + 5\sqrt{25\cdot 3} = 2\cdot 3\sqrt{3} + 5\cdot 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 25\sqrt{3} = 31\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{600} - 4\sqrt{24} = 3\sqrt{100\cdot 6} - 4\sqrt{4\cdot 6} = 3\cdot 10\sqrt{6} - 4\cdot 2\sqrt{6} = 30\sqrt{6} - 8\sqrt{6} = 22\sqrt{6}$

Zad. 5. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt[3]{b}$

a) $3\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{32} = 3\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{8\cdot 4} = 3\sqrt[3]{4} + 5\cdot 2\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4} + 10\sqrt[3]{4} =$
$= 13\sqrt[3]{4}$

b) $7\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{-54} = 7\sqrt[3]{8\cdot 2} - 3\sqrt[3]{-27\cdot 2} = 7\cdot 2\sqrt[3]{2} - 3\cdot(-3)\sqrt[3]{2} =$
$= 14\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{2} = 23\sqrt[3]{2}$

c) $4\sqrt[3]{-250} + 4\sqrt[3]{-128} = 4\sqrt[3]{-125\cdot 2} + 4\sqrt[3]{-64\cdot 2} = 4\cdot(-5)\sqrt[3]{2} + 4\cdot(-4)\sqrt[3]{2} =$
$= -20\sqrt[3]{2} - 16\sqrt[3]{2} = -36\sqrt[3]{2}$

d) $3\sqrt[3]{5000} - 4\sqrt[3]{40} = 3\cdot\sqrt[3]{1000\cdot 5} - 4\sqrt[3]{8\cdot 5} = 3\cdot 10\sqrt[3]{5} - 4\cdot 2\sqrt[3]{5} =$
$= 30\sqrt[3]{5} - 8\sqrt[3]{5} = 22\sqrt[3]{5}$

Zad. 6. Oblicz

$2^1 = 2 \xrightarrow{\cdot 2} 2^2 = 4 \xrightarrow{\cdot 2} 2^3 = 8 \xrightarrow{\cdot 2} 2^4 = 16 \xrightarrow{\cdot 2} 2^5 = 32 \xrightarrow{\cdot 2} 2^6 = 64$

Tablice maturalne (strona 5)

– dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (1) oraz $a^0 = 1$ (2)

– dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (3)

– dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ (4)

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ (5) $\quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$ (6) $\quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (7)

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ (8) $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (9)

Zad. 7. Zapisz jako potęgę liczby 2

a) $1 = 2^0$ (2)

b) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ (1)

c) $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$ (3)

d) $\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = 2^{\frac{1}{2}}$ (3)

e) $\frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = 2^{-\frac{3}{5}}$ (4)

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[10]{4} = \sqrt[2]{2^1} \cdot \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[10]{2^2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{10}} =$ (5)

$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{10}} = 2^{\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{2}{10}} = 2^{\frac{13}{10}}$

g) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[6]{2^1}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}}$ (7) $= 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$

h) $\frac{8^{30}}{4^{20}} = \frac{(2^3)^{30}}{(2^2)^{20}}$ (6) $= \frac{2^{3\cdot 30}}{2^{2\cdot 20}} = \frac{2^{90}}{2^{40}} = 2^{90-40} = 2^{50}$

i) $\frac{4^{50}}{8^{-30}} = \frac{(2^2)^{50}}{(2^3)^{-30}} = \frac{2^{2\cdot 50}}{2^{3\cdot(-30)}} = \frac{2^{100}}{2^{-90}} = 2^{100-(-90)} = 2^{100+90} = 2^{190}$

j) $4^{50} \cdot 8^{-30} = (2^2)^{50} \cdot (2^3)^{-30} = 2^{2\cdot 50} \cdot 2^{3\cdot(-30)} = 2^{100} \cdot 2^{-90} =$

$= 2^{100+(-90)} = 2^{100-90} = 2^{10}$

$x+x+x+x=4x$

k) $8^{50}+8^{50}+8^{50}+8^{50}=4\cdot 8^{50}=2^2\cdot(2^3)^{50}=2^2\cdot 2^{3\cdot 50}=$

$=2^2\cdot 2^{150}=2^{2+150}=2^{152}$

połowa $=\frac{1}{2}$

l) połowa $2^{1024}=\frac{1}{2}\cdot 2^{1024}=\frac{2^{1024}}{2}=\frac{2^{1024}}{2^1}=2^{1024-1}=2^{1023}$

Zad. 8. Oblicz

a) $-1024^0=-1$

b) $(-1024)^0=1$

c) $-3^2=-3\cdot 3=-9$

d) $(-3)^4=(-1)^4\cdot 3^4=+81$ 8

e) $(2\frac{1}{3})^2=\left(\frac{2\cdot 3+1}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{7^2}{3^2}=\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}$ 9

f) $5^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$ 1

g) $(-0,3)^{-2}=\left(-\frac{3}{10}\right)^{-2}=\left(-\frac{10}{3}\right)^2=+\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}$ 1

h) $(3\frac{1}{3})^{-3}=\left(\frac{10}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{27}{1000}$

i) $81^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{81^1}=\sqrt{81}=9$ 3

j) $16^{0,75}=16^{\frac{75}{100}}=16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=2^3=8$ 5

k) $27^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}^{\,2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

l) $(-0,008)^{-\frac{2}{3}}=\left(-\frac{8}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(-\frac{1000}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{-\frac{1000}{8}}^{\,2}$

$=\left(-\frac{10}{2}\right)^2=(-5)^2=+5^2=25$

m) $81^{-0,25}=81^{-\frac{25}{100}}=81^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\frac{1}{3}$

Można też:

m) $81^{-0,25}=(9^2)^{-0,25}=9^{-0,5}=(3^2)^{-0,5}=3^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$

Zad.9. Udowodnij, że liczba $3^{45}+9^{22}+27^{14}$ jest podzielna przez 37.

$3^{45}+9^{22}+27^{14}=3^{45}+(3^2)^{22}+(3^3)^{14}=3^{45}+3^{44}+3^{42}=3^{42}(3^3+3^2+3^0)=$

$=3^{42}(27+9+1)=3^{42}\cdot 37=37\cdot 3^{42}$ $\quad 3^{42}$ - liczba naturalna

Zatem $37\cdot 3^{42}$ jest naturalną wielokrotnością 37, stąd

$37\cdot 3^{42}$ jest podzielne przez 37 cnu.